3. Übung
Logik, Kongruenzrechnung

Präsenzübungen (für 7.11./8.11./9.11)

1. Eine Aussage A heißt für eine andere Aussage B hinreichend, wenn gilt: $A \Rightarrow B$
   Eine Aussage A heißt für eine andere Aussage B notwendig, wenn gilt: $\neg A \Rightarrow \neg B$

a. Beurteilen Sie für die nachfolgenden Aussagenpaare
   - ob A hinreichend für B ist
   - ob A notwendig für B ist oder
   - ob A hinreichend und notwendig für B ist

   und erläutern Sie kurz Ihre Beurteilung.
   i) A: n ist durch 10 teilbar B: n ist gerade
   ii) A: Gerade g ist parallel zu h B: Gerade h ist parallel zu g
   iii) A: Ich habe 50% in den Übungsaufgaben.
   B: Ich bestehe die Klausur in Mathe am Ende dieses Semesters.
   iv) A: Ich bestehe die Klausur B: Ich bin für das 2. Semester zugelassen
   v) A: n lässt beim Teilen durch 8 einen Rest von 4
   B: n ist durch 4 teilbar
   vi) in Aufgabe 2 Übung 2
   A: Auf einer Seite steht ein Vokal.
   B: Auf einer Seite steht eine ungerade Zahl.

b. Geben Sie je ein umgangssprachliches Beispiel für Aussagen A und B an, so dass
   i. A hinreichend für B ist
   ii. A notwendig für B ist.

2. Aussage: „Addiert man eine Zahl, die beim Teilen durch 3 einen Rest von 2 lässt zu einer Zahl, die beim Teilen durch 5 einen Rest von 2 lässt, so erhält man eine Zahl, die beim Teilen durch 8 den Rest 4 lässt.“

Beweis:	Beispiel:
$a = 3n + 2$	$a = 8$
$b = 5n + 2$	$b = 22$
$a + b = 8n + 4$	$a + b = 30 = 3 \cdot 8 + 6$

   a. Wieso widerspricht das Beispiel der Aussage und dem Beweis?
   b. Wieso ist die Aussage falsch?
   c. Was ist an dem Beweis falsch?
   d. Welche Aussage kann man machen? D.h. wie lautet die Aussage korrekt?
   „Addiert man eine Zahl, die beim Teilen durch 3 einen Rest von 2 lässt zu einer Zahl, die beim Teilen durch 5 einen Rest von 2 lässt, so erhält man eine Zahl, die beim Teilen durch 8 ... (?) ...

Hausübungen (Abgabe: Do, 10.11.)

3. Übersetzen Sie in die Umgangssprache:
   $\forall n \in \mathbb{N} : \left(\exists k \in \mathbb{N} : n = k^2 \text{ und } k \text{ ungerade} \Rightarrow n \text{ ungerade} \right)$

4. Bilden Sie die Kontraposition
   $\forall p \in \mathbb{N} : \left(p \text{ ist Primzahl } \Rightarrow p = 2 \text{ oder } p \text{ ungerade} \right)$

5. $((A \text{ und } B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \text{ oder } (B \Rightarrow C))$
   a. Zeigen Sie dieses über eine Wahrheitstafel.
   b. Kommentieren Sie die einzelnen Umformungen des folgenden Beweises

$$
\begin{aligned}
&(A \wedge B) \Rightarrow C \\
&\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee C \vee \neg B \vee C \\
&\Leftrightarrow (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)
\end{aligned}
$$

6. Berechnen Sie mit Ihrem Taschenrechner $k \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}, r < 23846$ für $6318495 = k \cdot 23846 + r$. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

7. „Päckchenrechnen“ bekommt dann einen Sinn, wenn die SchülerInnen durch systematisches Üben eine tiefere Einsichten gewinnen können.
   $1^2 = 1 = 0 \cdot 3 + 1$
   $2^2 = 4 = 1 \cdot 3 + 1$
   $3^2 = 9 = 3 \cdot 3 + 0$
   $4^2 = \ldots$
   ...
   a. Setzen Sie die Kette fort, bis Sie eine Systematik erkennen können.
   b. Welcher Rest taucht beim Teilen durch 3 bei Quadratzahlen offenbar nicht auf? Begründen Sie das.